TEMA 7: SUCESIONES Y SERIES FINITAS 19/04/21

SUCESIÓN: Cualquier función cuyo dominio es el conjunto de números enteros a partir de un cierto n_0.
Es decir, los primeros términos de esa colecc a la que llamamos suc no tienen por qué ser nºs enteros. A partir de cierto nº comienza nuestra suc.

Cada elemento se llama TÉRMINO o MIEMBRO de la suc.

A la regla que da la fórmula para calcular el resto de términos se llama término general. Será la forma de calcular todos los términos de una suc.

La suc se escribe entre llaves, porque es un conjunto

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$$

Una suc es CONVERGENTE si el módulo, es decir, la distancia, entre el término gral de la suc y un valor L es menor que ε. ε es un número todo lo pequeño que nos dé la gana.

CONVERGE si $|a_n - L| < \varepsilon$

es decir, a_n se acerca a L

$\lim\limits_{n \to \infty} a_n = L \longrightarrow$ L tiene que ser un nº finito.

TEOREMA DEL ENCAJE

Sean $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ dos sucesiones convergentes al mismo número real L. Si conseguimos otra sucesión $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ que verifica que está encajada entre a_n y b_n, es decir, a_n es término a término MENOR O IGUAL que C_n y MENOR O IGUAL que b_n para todo índice n salvo un número finito, entonces la sucesión $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ también converge a L.

Ejemplo: $C_n\ (-1)^n \cdot \frac{1}{n!}$

Vemos que se alterna. Es decir, si n es 1 el término será negativo, pero si n es par ese término será positivo.

Es una sucesión que alterna nºs negativos con nºs positivos

Nos piden su carácter: convergente o divergente.

Sabemos que $2^n < n!$

$n=2$	$2^2 = 2\cdot 2 = 4$	$2! = 2$ NO SE CUMPLE
$n=3$	$2^3 = 2\cdot 2\cdot 2 = 8$	$3! = 1\cdot 2\cdot 3 = 6$ NO SE CUMPLE
$n=4$	$2^4 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2 = 16$	$4! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 = 24$ SÍ SE CUMPLE

Es verdad a partir de un cierto n. A partir de $n \geq 4$ ya se cumple.

Se va a cumplir la desigualdad: $(-1)^n \cdot \frac{1}{n!}$ será siempre mayor que lo mismo pero todo en negativo y será menor o igual que lo mismo pero todo en positivo

$$\frac{-1}{2^n} \leq (-1)^n \frac{1}{n!} < \frac{1}{2^n}$$

Si 2^n es menor que $n!$, $\frac{1}{n!}$ será menor que $\frac{1}{2^n}$

Esta suceø $-\frac{1}{2^n} \leq (-1)^n \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^n}$

$\frac{1}{2^n} \to 0$ tiende a 0 porque el lim cuando $x \to \infty$ es 0

$-\frac{1}{2^n} \to 0$ tiende a 0

Aplicamos el teorema del encaje. Qué tenemos:
Una suceø a_n que tiende a 0.
Otra suceø b_n que tiende a 0.

Si encuentro una suceø que esté encajada entre esas 2, a la fuerza tiene que converger y lo tiene que hacer a ese mismo valor, por lo tanto tb. va a converger a 0.

$$c_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{n!} \to 0$$

Así se aplica el teorema del encaje. Dada una suceø tengo que buscar 2, una que la aminore, otra que la maximice y tener suerte que esas 2 que acabo de encontrar converjan al mismo valor. Si lo hacen, la del medio tb. va a converger a ese valor.

TEOREMA DEL VALOR ABSOLUTO

Si el lim cuando $n \to \infty$ del modulo del termino general de una suces es $= 0$ entonces el lim cuando $n \to \infty$ de la suces del término gral tb. es 0.
Es decir, aplicando valor absoluto todo se mantiene.

$$\lim_{n \to \infty} |a_n| = 0 \Rightarrow \lim_{n \to \infty} a_n = 0$$

MONOTONÍA

Es el crecimiento o decrecimiento de los terminos de dicha suces.
Una suces creciente o decreciente estricta / se dice que es monotona si sus terminos son

Crecientes → monotona creciente
Decreciente → monotona decreciente

Comparamos termino a término.

Una suces es acotada si existe un numero real positivo M tal que M es mayor o igual que cualquier término de dicha suces en valor absoluto.

$$|a_n| \leq M \ \forall n$$

Toda suces que es monotona y acotada es CONVERGENTE.

Convergente no implica monótona y acotada; pero monótona y acotada sí implica convergente.

Ejemplo: $a_n = \dfrac{2n}{1+n}$

En ppio, parece, punto a punto, que la suceø se acerca a 2. Es decir, que 2 será una cota superior de esta suceø.

Parece intuitivamente que la suceø tiene términos crecientes. Cada término es mayor que el anterior.

Lo comprobamos. Vemos si es acotada. Quiero buscar una cota para esta suceø. La pongo en valor absoluto y tengo que ver que es menor o igual que un M.

$$\left|\frac{2n}{1+n}\right| \le \frac{2n}{1+n} \le \frac{2n}{n} = 2$$

Veo que es positivo y será = exacto que quitar el valor absoluto

$\dfrac{2n}{1+n}$ es + peq. que $\dfrac{2n}{n}$ y $\dfrac{2n}{n} = 2$

Acabo de encontrar una cota. 2 es mayor o = que el módulo de $\dfrac{2n}{1+n}$ para todo n.

2 es una cota superior de esta suceø.

Una cota es un nº. No depende de n, tengo q intentar sacarlas n. Una forma es dibujarla

MONOTONÍA: Cojo un término y lo divido entre el anterior. Si es mayor que el anterior, el cociente será mayor que 1.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{2(n+1)}{1+(n+1)}}{\frac{2n}{1+n}} = \frac{2(n+1)(1+n)}{2n(1+(n+1))} = \frac{n^2+2n+1}{n^2+2n} > 1$$

Si tengo 6 y 5

$$\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n} \quad \frac{6^2+6\cdot 2+1}{5^2+2\cdot 5} = \frac{49}{35} = 1,4$$

Con lo que demostramos que la suces es monotona creciente y acotada por el 2.
Con lo que puedo decir que es CONVERGENTE.

SERIES

Dada una suces, la suma parcial n-esima será la suma de sus n primeros terminos.
S_7 = suma de los 7 primeros terminos
S_{15} = suma de los 15 primeros terminos

Se representa como S_n.

Definimos serie como la suma infinita de los terminos de una suces, es decir, la suma de todos los terminos de una suces.

Una serie es convergente si el sumatorio desde $K=1$ hasta ∞ de los a_K es = al $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$

$$\sum_{K=1}^{\infty} a_K = \lim_{n\to\infty} \sum_{K=1}^{n} a_K = \lim_{n\to\infty} S_n = S$$

S tiene que ser un numero real, no puede ser infinito.

Series geometricas

Se puede ver si son convergentes o no y se puede dar el resultado, cuánto vale esa serie

$$\sum_{n\geq 1} a \cdot r^n$$

Converge si el modulo de r es menor que 1
$|r| < 1$

Diverge si el modulo de r es mayor que 1
$|r| > 1$

Esta serie converge al sgte valor: $\frac{a}{1-r}$

Ejemplo: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2^n}$ Queremos saber si es convergente o divergente.

$\sum_{n\geq 1} 3\left(\frac{1}{2}\right)^n$ ← La podemos reescribir así

Esa forma de escribir la reconocemos como geometrica $\sum_{n>1} a \cdot r^n$ converge a $\frac{a}{1-r}$

y yo sé que converge si r es menor que 1

En este caso $r = \frac{1}{2}$

$a = 3 \quad r = 1/2$

$$\frac{a}{1-r} = \frac{3}{1-\frac{1}{2}} = \frac{3}{\frac{1}{2}} = 6$$

converge a 6

Como $r < 1$, converge

Ejemplo 2

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n$$

Todo lo que esté elevado a la n tiene que estar dentro de lo r, si queremos llevarlo a una serie geometrica.

$$\sum_{n\geq 1} 3\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$\sum_{n\geq 1} a\cdot r^n$ converge a $\frac{a}{1-r}$

??

$a=3$ $r=1/2$ como r es mayor que 1 esta serie es divergente.

CRITERIO TÉRMINO GENERAL

Si una serie es convergente entonces el lim cdo k tiende a infinito de a_k tiene que ser 0.

Si el término gral de una serie no converge a 0 dicha serie es divergente.

Si $\sum_{n\geq 1} a_n$ es convergente, entonces

$\lim_{k\to\infty} a_k \to 0$

Si no converge a 0, es divergente.

Propiedades de las series

Suponemos una serie a_n que converge y su suma vale A. y otra b_n con suma B, es decir, 2 series convergentes, cada una a un valor distinto.

La serie formada por un número real por a_n será convergente y su suma vale ese número c por lo que valía la suma de los a_n, que era A, en este caso. Es decir, se comporta inerteniente a la multiplicación x un escalar

$\sum c a_n$ converge y su suma es cA

Si sumo 2 series convergentes, la serie resultado de esa suma también es una serie convergente y conocemos el valor al que converge, que es la suma de A más la suma de B, lo que sumaban cada una de las series convergentes.

$$\sum (a_n + b_n) = A + B$$

$$\sum (a_n - b_n) = A - B$$

Criterio de comparación

Sean a_n y b_n series de términos positivos verificando que $a_n \leq b_n$, $\forall n$ están encajadas en el sentido que a_n siempre es + pequeñita que b_n.

Si b_n es convergente, si la grande converge, entonces a_n converge.

Si $\sum_{n \geq 1} a_n$ y $\sum_{n \geq 1} b_n$ son series de términos positivos, verificando $a_n \leq b_n, \forall n$ entonces

Si $\sum_{n \geq 1} b_n$ es convergente entonces $\sum_{n \geq 1} a_n$ tb. es convergente.

Recíproca%, si una serie es divergente y todos sus términos son menores o iguales a los de otra serie, esta última tb es divergente.

Ejemplo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2+3^n}$$

Se pide ver si es convergente o divergente.

Intento comparar con otra serie que conozca. Si puedo comparar con una serie que conozco y pongo esa serie menor o igual que otra que conozco, que sé que es convergente, esta va a converger y al revés.

$$a_n = \frac{1}{2+3^n} < \frac{1}{3^n} = b_n$$

$\downarrow$

Es una serie geométrica de razón 1/3. a es 1, si pongo 1/3 todo ello elevado a la n es lo mismo que $\frac{1}{3^n}$ y

por lo tanto como es menor que 1, la r, es una serie convergente, b_n es convergente

Como es convergente y término a término es mayor que la de a_n, a_n también tiene que ser convergente.

Criterio de comparación asintótica

Si $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$ (L finito y $\neq 0$), entonces

$$\sum_{n\geq 1} a_n \iff \sum_{n\geq 1} b_n \text{ converge}$$

Si el límite cuando $n\to\infty$ del cociente entre los términos grales de 2 series es finito y ≠ de 0, entonces ambas series tienen el mismo carácter, es decir, si una es convergente la otra tb; y si una es divergente la otra tb.

Ejemplo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n2^n+5}{4n^3+3n}$$

Si la comparo con esta → $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}$

¿Por qué con esa?

El 2^n es un exponencial, no puedo hacer nada

Aquí tengo de orden n y de orden n^3, si sacase un hipotético factor común una n, abajo me quedaría denominador de orden n^2

Me quedo como si fuese a aplicar Leibniz, más o menos. Abajo con lo + grande, que es n^2 y arriba con el exponencial 2^n

la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}$ es divergente, porque 2^n es un exponencial y un exponencial frente a una polinómica, la exponencial crece mucho + rápido, el numerador crece mucho + rapido q' el denominador. Si sumo todos los términos, se va a infinito.

Es una serie divergente.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n2^n+5}{4n^3+3n}$$ esta no sé como es pero si consigo hacer el límite y veo que vale L, tb. será divergente

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n2^n+5}{4n^3+3n}}{\frac{2^n}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\left[\frac{5}{n2^n}\right]}{4+\left(\frac{3}{n^2}\right)} = \frac{1}{4}$$

El lim entre el cociente de las 2 series vale 1/4 que es finito y $\neq 0$.

Como $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}$ es divergente, la otra tb es divergente.

Convergencia absoluta

Si la serie $\sum |a_n|$ converge, la serie $\sum a_n$ converge

Si la serie $\sum |a_n|$ converge, la serie $\sum a_n$ se dice absolutamente convergente.

Criterio del cociente

Criterio de D'Alembert

Sea $L = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ Entonces

a) Si $L < 1$ $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ converge;

b) Si $L > 1$, $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ diverge

Cociente entre 2 términos consecutivos de dicha serie, entonces:
- Si L es menor que 1, la serie converge
- Si L es mayor que 1, la serie es divergente.

Con calcular un límite podemos saber el carácter de la serie.

Si L vale 1 no puedo asegurar que la serie sea convergente o divergente.

Ejemplo: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{n+1} = 0$

Como 0 es menor que 1, la serie es CONVERGENTE

$$\frac{2^{n+1}\cdot n!}{(n+1)!\cdot 2^n} \quad \frac{\cancel{2^n}\cdot 2\cdot n!}{\cancel{2^n}\cdot(n+1)!} = \frac{2\cancel{n!}}{(n+1)\cdot\cancel{n!}} = \frac{2}{(n+1)}$$

$\to (n+1)! = (n+1)\cdot n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\ldots$

$3! = 3\cdot 2\cdot 1$ // $n! = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)\ldots$

Ejemplo 2: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}$ $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$

?

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)^2}}{\frac{2^n}{n^2}} \quad \frac{(2^{n+1})(n^2)}{(n+1)(n+1)(2^n)} \quad \frac{2n^2}{(n+1)^2 \cdot 2}$$

$$\lim_{n\to\infty} = \frac{2^n}{(n+1)^2} = 2$$

2 es mayor que 1 → DIVERGE

Ejemplo: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$ $\lim_{x\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n}{n^n} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

$e > 1$ = DIVERGE

$$\frac{(n+1)^{n+1}\, n!}{(n+1)!\, n^n} \quad \frac{\cancel{(n+1)}(n+1)^n\, \cancel{n!}}{\cancel{(n+1)} \cdot \cancel{n!}\, n^n} = \frac{(n+1)^n}{n^n}$$

Criterio de la raíz

Sea $L = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n}$ Entonces

a) si $L < 1$, $\sum_{n \geq 1} a_n$ CONVERGE

b) Si $L > 1$, $\sum_{n \geq 1} a_n$ DIVERGE

Sea L el lim cuando $n \to \infty$ de la raíz nesima del término gral de dicha serie, si $L < 1$ converge
si $L > 1$ diverge

Si $L = 1$ no podemos decir nada.

¿Cuando se aplica este criterio? Cuando tengo algo elevado a la n tanto en numerador como en denominador.

Ejemplo: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2n}}{n^n}$

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\frac{e^{2n}}{n^n}} = \lim_{n \to \infty} \frac{e^2}{n} = 0$$ CONVERGE

Ejemplo $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)^n}{(n+1)^n}$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(2n-1)^n}{(n+1)^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n-1)}{(n+1)} = 2$$

2 es mayor que 1: DIVERGE

	CONVERGE	DIVERGE
$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$		$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$
$\sum_{n=1}^{\infty}$	$\lvert r\rvert < 1$	$\lvert r\rvert \geq 1$
$\sum_{n=1}^{\infty}$	$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\lvert a_n\rvert} < 1$	$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\lvert a_n\rvert} > 1$
$\sum_{n=1}^{\infty}$	$\lim_{n\to\infty} \left\lvert \frac{a_{n+1}}{a_n} \right\rvert < 1$	$\lim_{n\to\infty} \left\lvert \frac{a_{n+1}}{a_n} \right\rvert > 1$
$\sum_{n=1}^{\infty}$	$0 \leq a_n \leq b_n$ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$	$0 \leq b_n \leq a_n$ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$